

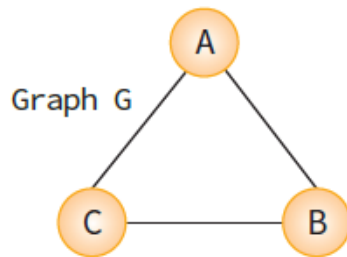
11장 그래프



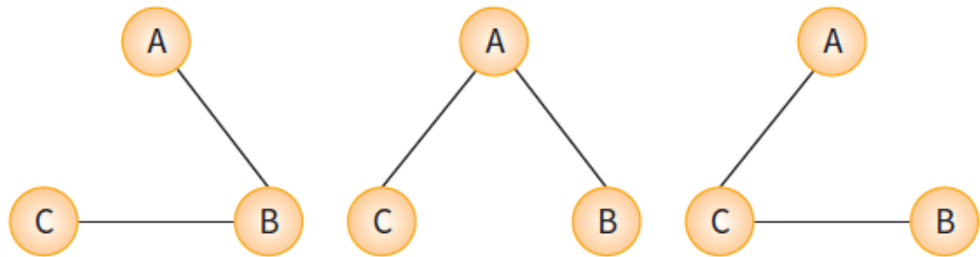


신장 트리(spanning tree)

- 그래프내의 모든 정점을 포함하는 트리
- n 개의 정점을 가지는 그래프의 신장트리는 $n-1$ 개의 간선을 가짐



(a) 연결 그래프



(b) 신장 트리





신장 트리 알고리즘

depth_first_search(v):

 v를 방문되었다고 표시;

 for all $u \in$ (v에 인접한 정점) do

 if (u가 아직 방문되지 않았으면)

 then (v,u)를 신장 트리 간선이라고 표시;

 depth_first_search(u)

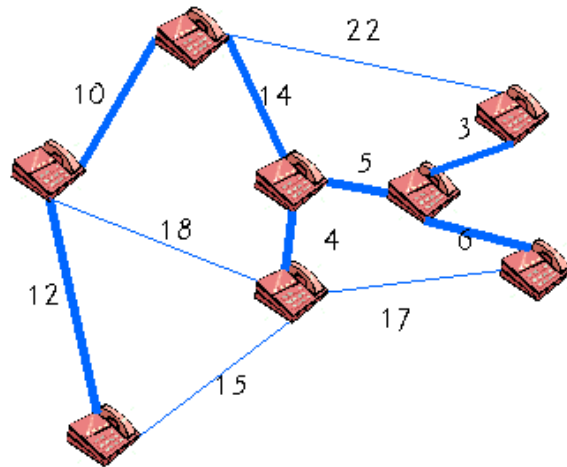




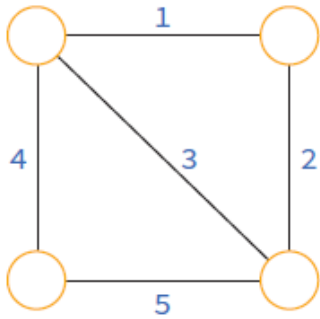
최소비용 신장트리

(minimum spanning tree)

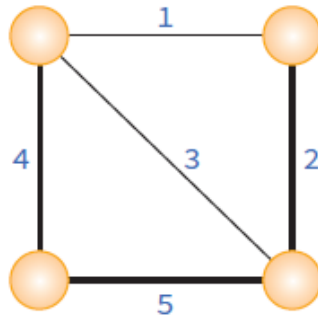
- 네트워크에 있는 모든 정점들을 가장 적은 수의 간선과 비용으로 연결
- MST의 응용
 - ▣ 도로 건설 - 도시들을 모두 연결하면서 도로의 길이를 최소가 되도록 하는 문제
 - ▣ 전기 회로 - 단자들을 모두 연결하면서 전선의 길이를 가장 최소로 하는 문제
 - ▣ 통신 - 전화선의 길이가 최소가 되도록 전화 케이블 망을 구성하는 문제
 - ▣ 배관 - 파이프를 모두 연결하면서 파이프의 총 길이를 최소로 하는 문제



MST의 예

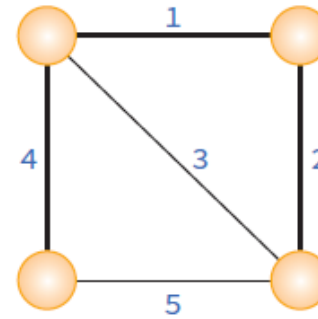


그래프



신장 트리

전체 비용=4+5+2=11



최소 비용 신장 트리

전체 비용=4+1+2=7

모든 정점을 연결하고
비용이 최소인 트리가
MST이다.





Kruskal의 MST 알고리즘

- 탐욕적인 방법(greedy method)
 - ▣ 주요 알고리즘 설계 기법
 - ▣ 각 단계에서 최선의 답을 선택하는 과정을 반복함으로써 최종적인 해답에 도달
 - ▣ 탐욕적인 방법은 항상 최적의 해답을 주는지 검증 필요
 - ▣ Kruskal MST 알고리즘은 최적의 해답 임이 증명됨





Kruskal의 MST 알고리즘

```
// 최소비용 스패닝트리를 구하는 Kruskal의 알고리즘
// 입력: 가중치 그래프  $G = (V, E)$ ,  $n$ 은 노드의 개수
// 출력:  $E_T$ , 최소비용 신장 트리를 이루는 간선들의 집합
kruskal(G)
```

E 를 $w(e_1) \leq \dots \leq w(e_e)$ 가 되도록 정렬한다.

$E_T \leftarrow \Phi$; $ecounter \leftarrow 0$

$k \leftarrow 0$

while $ecounter < (n - 1)$ **do**

$k \leftarrow k + 1$

if $E_T \cup \{e_k\}$ 가 사이클을 포함하지 않으면

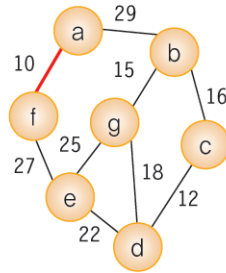
then $E_T \leftarrow E_T \cup \{e_k\}$; $ecounter \leftarrow ecounter + 1$

return E_T



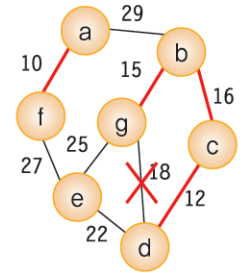
af	cd	bg	bc	dg	de	eg	ef	ab
10	12	15	16	18	22	25	27	29

↑



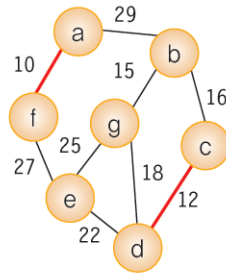
af	cd	bg	bc	dg	de	eg	ef	ab
10	12	15	16	18	22	25	27	29

↑



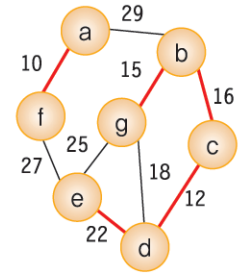
af	cd	bg	bc	dg	de	eg	ef	ab
10	12	15	16	18	22	25	27	29

↑



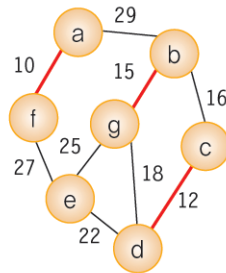
af	cd	bg	bc	dg	de	eg	ef	ab
10	12	15	16	18	22	25	27	29

↑



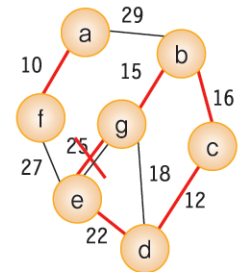
af	cd	bg	bc	dg	de	eg	ef	ab
10	12	15	16	18	22	25	27	29

↑



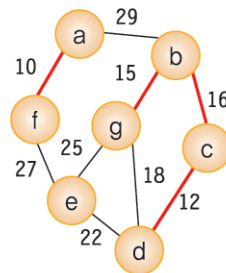
af	cd	bg	bc	dg	de	eg	ef	ab
10	12	15	16	18	22	25	27	29

↑



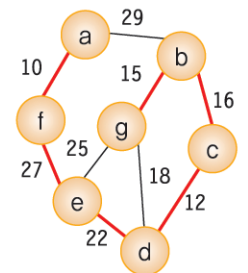
af	cd	bg	bc	dg	de	eg	ef	ab
10	12	15	16	18	22	25	27	29

↑



af	cd	bg	bc	dg	de	eg	ef	ab
10	12	15	16	18	22	25	27	29

↑



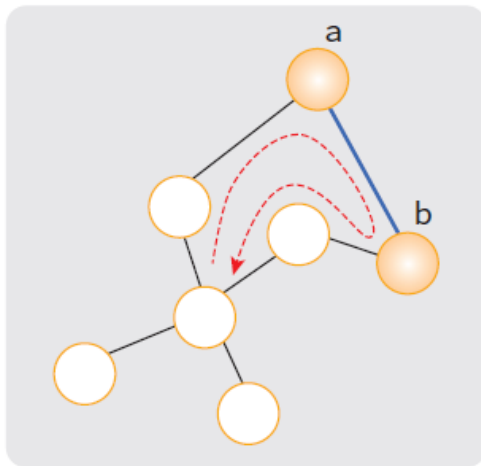


Kruskal의 MST 알고리즘

□ union-find 알고리즘

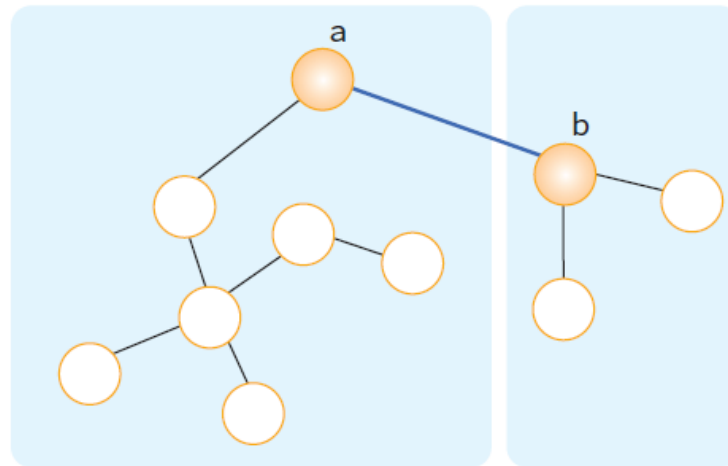
- 원소가 어떤 집합에 속하는지 알아냄
- Kruskal의 MST 알고리즘에서 사이클 검사에 사용

a와 b가 같은 집합에 속함



(a) 사이클 형성

a와 b가 다른 집합에 속함



(b) 사이클 형성되지 않음

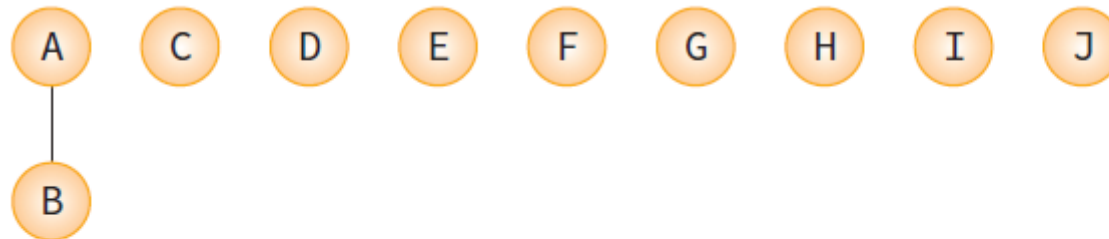




Kruskal의 MST 알고리즘



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

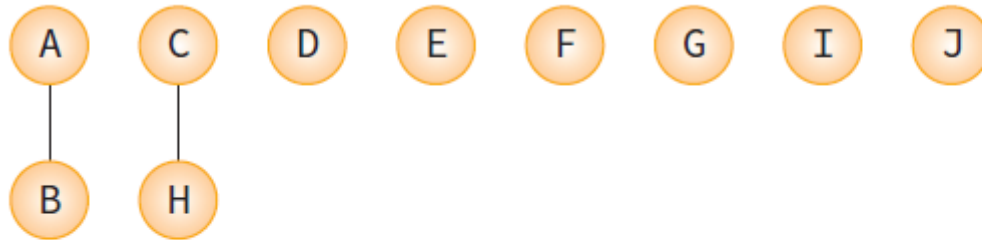


A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1





Kruskal의 MST 알고리즘



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
-1	0	-1	-1	-1	-1	-1	2	-1	-1





union-find 알고리즘

UNION(a, b):

root1 = FIND(a); // 노드 a의 루트를 찾는다.

root2 = FIND(b); // 노드 b의 루트를 찾는다.

if root1 $\neq$ root2 // 합한다.

parent[root1] = root2;

FIND(curr): // curr의 루트를 찾는다.

if (parent[curr] == -1)

return curr; // 루트

while (parent[curr] $\neq$ -1) curr = parent[curr];

return curr;





union-find 프로그램

```
int parent[MAX_VERTICES];           // 부모 노드
                                     // 초기화
void set_init(int n)
{
    for (int i = 0; i < n; i++)
        parent[i] = -1;
}
// curr가 속하는 집합을 반환한다.
int set_find(int curr)
{
    if (parent[curr] == -1)
        return curr;                // 루트
    while (parent[curr] != -1) curr = parent[curr];
    return curr;
}
```





union-find 프로그램

```
// 두개의 원소가 속한 집합을 합친다.  
void set_union(int a, int b)  
{  
    int root1 = set_find(a);           // 노드 a의 루트를 찾는다.  
    int root2 = set_find(b);           // 노드 b의 루트를 찾는다.  
    if (root1 != root2)                // 합한다.  
        parent[root1] = root2;  
}
```





Kruskal의 MST 프로그램

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0

#define MAX_VERTICES 100
#define INF 1000

int parent[MAX_VERTICES];           // 부모 노드

void set_init(int n)                // 초기화
{
    for (int i = 0; i < n; i++)
        parent[i] = -1;
}
// curr가 속하는 집합을 반환한다.
int set_find(int curr)
{
    if (parent[curr] == -1)
        return curr;                // 루트
    while (parent[curr] != -1) curr = parent[curr];
    return curr;
}
```





Kruskal의 MST 프로그램

```
// 두개의 원소가 속한 집합을 합친다.
void set_union(int a, int b)
{
    int root1 = set_find(a);          // 노드 a의 루트를 찾는다.
    int root2 = set_find(b);          // 노드 b의 루트를 찾는다.
    if (root1 != root2)                // 합한다.
        parent[root1] = root2;
}

struct Edge {                          // 간선을 나타내는 구조체
    int start, end, weight;
};

typedef struct GraphType {
    int n;          // 간선의 개수
    struct Edge edges[2 * MAX_VERTICES];
} GraphType;
```





Kruskal의 MST 프로그램

```
// 그래프 초기화
void graph_init(GraphType* g)
{
    g->n = 0;
    for (int i = 0; i < 2 * MAX_VERTICES; i++) {
        g->edges[i].start = 0;
        g->edges[i].end = 0;
        g->edges[i].weight = INF;
    }
}

// 간선 삽입 연산
void insert_edge(GraphType* g, int start, int end, int w)
{
    g->edges[g->n].start = start;
    g->edges[g->n].end = end;
    g->edges[g->n].weight = w;
    g->n++;
}

// qsort()에 사용되는 함수
int compare(const void* a, const void* b)
{
    struct Edge* x = (struct Edge*)a;
    struct Edge* y = (struct Edge*)b;
    return (x->weight - y->weight);
}
```





Kruskal의 MST 프로그램

// kruskal의 최소 비용 신장 트리 프로그램

```
void kruskal(GraphType *g)
```

```
{
```

```
    int edge_accepted = 0;
```

```
    // 현재까지 선택된 간선의 수
```

```
    int uset, vset;
```

```
    // 정점 u와 정점 v의 집합 번호
```

```
    struct Edge e;
```

```
    set_init(g->n);
```

```
    // 집합 초기화
```

```
    qsort(g->edges, g->n, sizeof(struct Edge), compare);
```

```
    printf("크루스칼 최소 신장 트리 알고리즘 \n");
```

```
    int i = 0;
```

```
    while (edge_accepted < (g->n - 1))
```

```
    // 간선의 수 < (n-1)
```

```
    {
```

```
        e = g->edges[i];
```

```
        uset = set_find(e.start);
```

```
        // 정점 u의 집합 번호
```

```
        vset = set_find(e.end);
```

```
        // 정점 v의 집합 번호
```

```
        if (uset != vset) {
```

```
        // 서로 속한 집합이 다르면
```

```
            printf("간선 (%d,%d) %d 선택\n", e.start, e.end, e.weight);
```

```
            edge_accepted++;
```

```
            set_union(uset, vset); // 두개의 집합을 합친다.
```

```
        }
```

```
        i++;
```

```
    }
```

```
}
```





Kruskal의 MST 프로그램

```
int main(void)
{
    GraphType *g;
    g = (GraphType *)malloc(sizeof(GraphType));
    graph_init(g);

    insert_edge(g, 0, 1, 29);
    insert_edge(g, 1, 2, 16);
    insert_edge(g, 2, 3, 12);
    insert_edge(g, 3, 4, 22);
    insert_edge(g, 4, 5, 27);
    insert_edge(g, 5, 0, 10);
    insert_edge(g, 6, 1, 15);
    insert_edge(g, 6, 3, 18);
    insert_edge(g, 6, 4, 25);

    kruskal(g);
    free(g);
    return 0;
}
```



크루스칼 최소 신장 트리 알고리즘

간선 (5,0) 10 선택

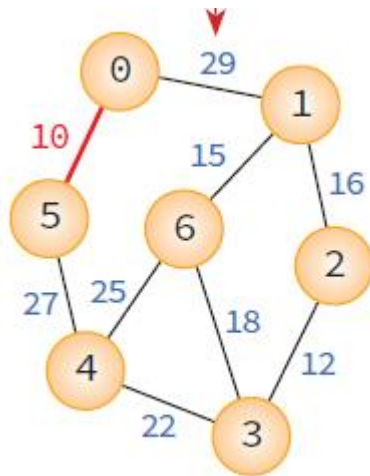
간선 (2,3) 12 선택

간선 (6,1) 15 선택

간선 (1,2) 16 선택

간선 (3,4) 22 선택

간선 (4,5) 27 선택





Kruskal의 MST 알고리즘 복잡도

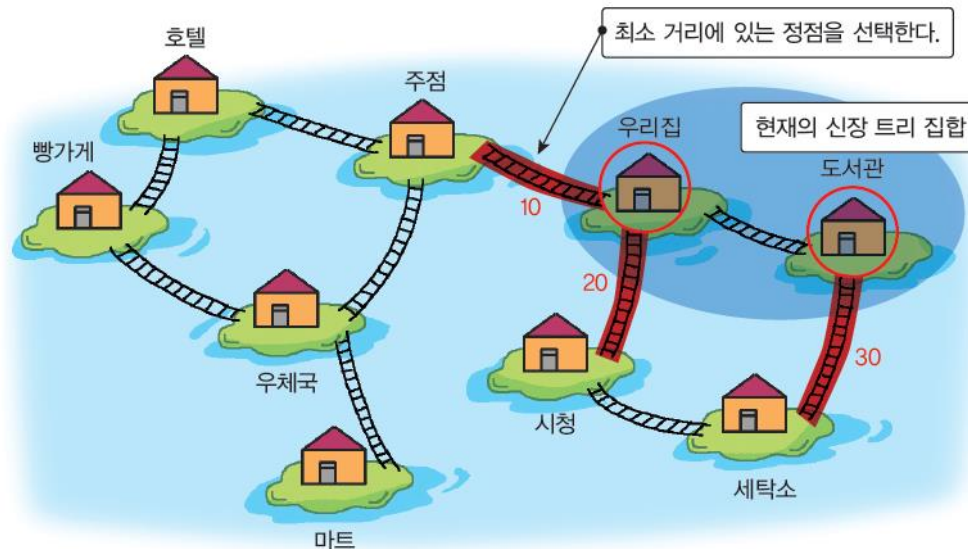
- Kruskal 알고리즘은 대부분 간선들을 정렬하는 시간에 좌우됨
 - ▣ 사이클 테스트 등의 작업은 정렬에 비해 매우 신속하게 수행됨
- 네트워크의 간선 e 개를 *퀵정렬과 같은 효율적인 알고리즘으로 정렬*한다면 Kruskal 알고리즘의 시간 복잡도는 $O(e \cdot \log(e))$ 가 된다





Prim의 MST 알고리즘

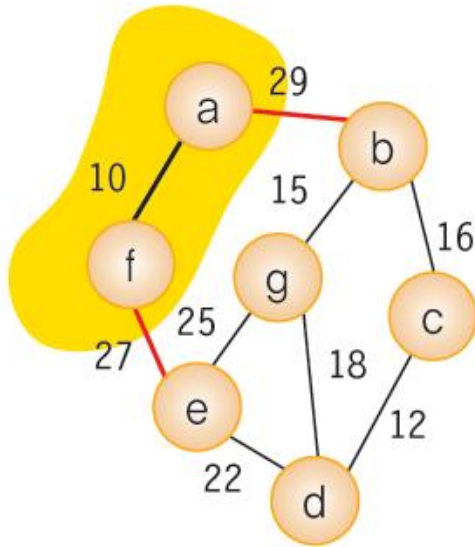
- 시작 정점에서부터 출발하여 신장 트리 집합을 단계적으로 확장해나감
- 신장 트리 집합에 인접한 정점 중에서 최저 간선으로 연결된 정점 선택하여 신장 트리 집합에 추가함





Prim의 MST 알고리즘

트리 정점 집합



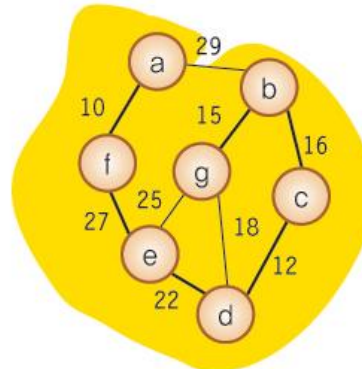
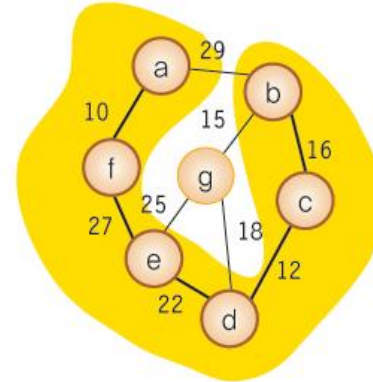
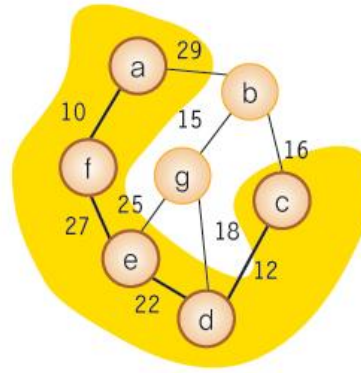
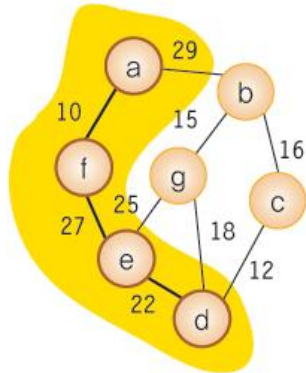
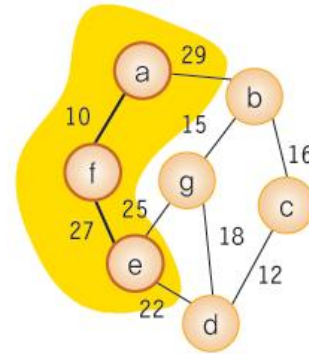
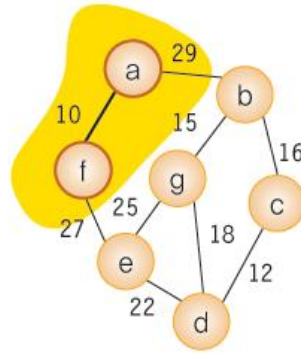
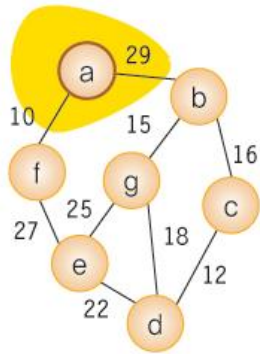
간선 $(a, b)=29$

간선 $(f, e)=27$

간선 (f, e) 선택

정점 e 가 신장 트리
집합에 추가됨







Prim의 MST 알고리즘

```
// 최소 비용 신장 트리를 구하는 Prim의 알고리즘  
// 입력: 네트워크  $G=(V, E)$ ,  $s$ 는 시작 정점  
// 출력: 최소 비용 신장 트리를 이루는 정점들의 집합  
Prim( $G, s$ )
```

```
    for each  $u \in V$  do  
         $\text{dist}[u] \leftarrow \infty$   
     $\text{dist}[s] \leftarrow 0$   
    우선 순위큐  $Q$ 에 모든 정점을 삽입(우선순위는  $\text{dist}[]$ )  
    for  $i \leftarrow 0$  to  $n-1$  do  
         $u \leftarrow \text{delete\_min}(Q)$   
        화면에  $u$ 를 출력  
        for each  $v \in (u \text{의 인접 정점})$   
            if(  $v \in Q$  and  $\text{weight}[u][v] < \text{dist}[v]$  )  
                then  $\text{dist}[v] \leftarrow \text{weight}[u][v]$ 
```





Prim의 MST 프로그램

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0
#define MAX_VERTICES 100
#define INF 1000L

typedef struct GraphType {
    int n;          // 정점의 개수
    int weight[MAX_VERTICES][MAX_VERTICES];
} GraphType;

int selected[MAX_VERTICES];
int distance[MAX_VERTICES];
```





Prim의 MST 프로그램

```
// 최소 dist[v] 값을 갖는 정점을 반환
int get_min_vertex(int n)
{
    int v, i;
    for (i = 0; i < n; i++)
        if (!selected[i]) {
            v = i;
            break;
        }
    for (i = 0; i < n; i++)
        if (!selected[i] && (distance[i] < distance[v])) v = i;
    return (v);
}
```





Prim의 MST 프로그램

```
//
void prim(GraphType* g, int s)
{
    int i, u, v;

    for (u = 0; u < g->n; u++)
        distance[u] = INF;
    distance[s] = 0;
    for (i = 0; i < g->n; i++) {
        u = get_min_vertex(g->n);
        selected[u] = TRUE;
        if (distance[u] == INF) return;
        printf("정점 %d 추가\n", u);
        for (v = 0; v < g->n; v++)
            if (g->weight[u][v] != INF)
                if (!selected[v] && g->weight[u][v] < distance[v])
                    distance[v] = g->weight[u][v];
    }
}
```





Prim의 MST 프로그램

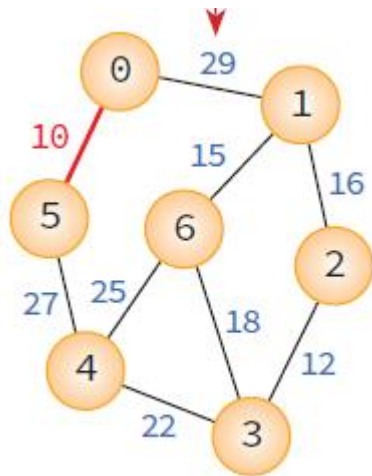
```
int main(void)
{
    GraphType g = { 7,
        {{ 0, 29, INF, INF, INF, 10, INF },
        { 29, 0, 16, INF, INF, INF, 15 },
        { INF, 16, 0, 12, INF, INF, INF },
        { INF, INF, 12, 0, 22, INF, 18 },
        { INF, INF, INF, 22, 0, 27, 25 },
        { 10, INF, INF, INF, 27, 0, INF },
        { INF, 15, INF, 18, 25, INF, 0 }}
    };
    prim(&g, 0);
    return 0;
}
```





시행 결과

정점 0 추가
정점 5 추가
정점 4 추가
정점 3 추가
정점 2 추가
정점 1 추가
정점 6 추가





Prim의 MST 알고리즘 복잡도

- 주 반복문이 정점의 수 n 만큼 반복하고, 내부 반복문이 n 번 반복하므로 Prim의 알고리즘은 **$O(n^2)$** 의 복잡도를 가진다.
- 희박한 그래프
 - ▣ $O(e \cdot \log(e))$ 인 Kruskal의 알고리즘이 유리
- 밀집한 그래프
 - ▣ **$O(n^2)$** 인 Prim의 알고리즘이 유리





최단 경로(shortest path)

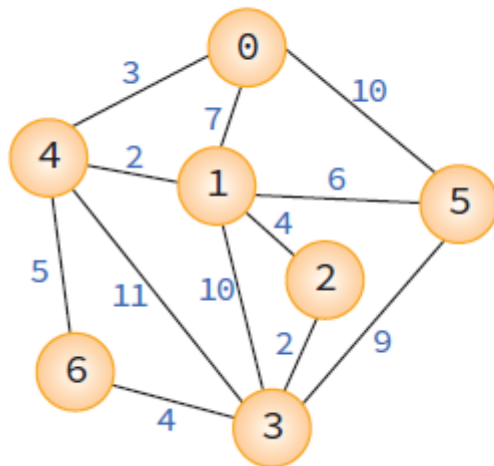
- 네트워크에서 정점 u 와 정점 v 를 연결하는 경로 중에서 간선들의 가중치 합이 최소가 되는 경로
- 간선의 가중치는 비용, 거리, 시간 등





가장치 이적해려

난보이르



	0	1	2	3	4	4	5
0	0	7	∞	∞	3	10	∞
1	7	0	4	10	2	6	∞
2	∞	4	0	2	∞	∞	∞
3	∞	10	2	0	11	9	4
4	3	2	∞	11	0	∞	5
5	10	6	∞	9	∞	0	∞
6	∞	∞	∞	4	5	∞	0





최단 경로 알고리즘

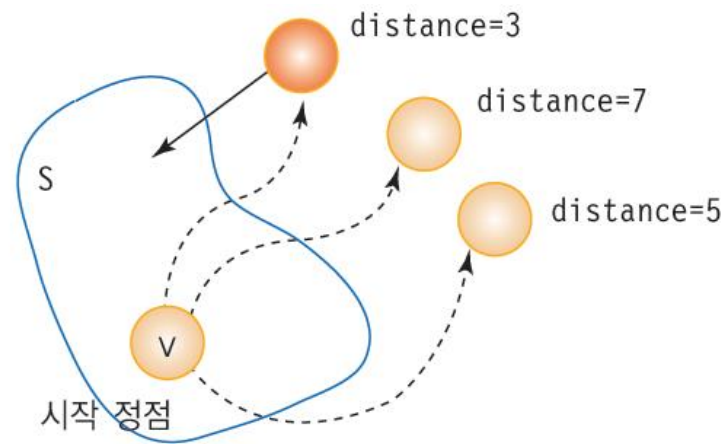
- Dijkstra 알고리즘: 하나의 시작 정점에서 다른 정점까지의 최단 경로 계산
- Floyd 알고리즘은 모든 정점에서 다른 모든 정점까지의 최단 경로를 계산





Dijkstra의 최단 경로 알고리즘

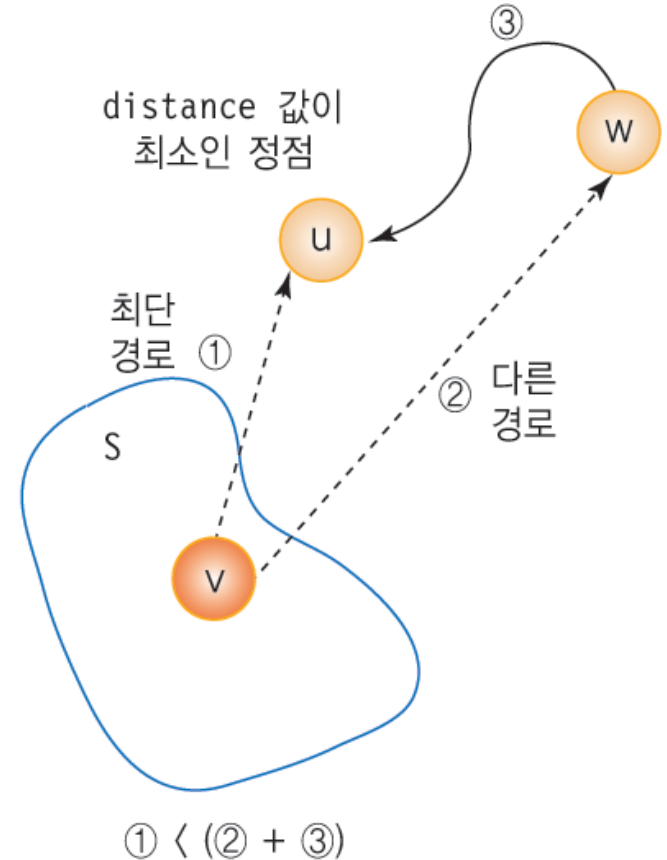
- 하나의 시작 정점으로부터 모든 다른 정점까지의 최단 경로 찾기
- 집합 **S**: 시작 정점 **v**로부터의 최단경로가 이미 발견된 정점들의 집합
- **distance** 배열: 최단경로가 알려진 정점들만을 이용한 다른 정점들까지의 최단경로 길이
- 매 단계에서 가장 **distance** 값이 작은 정점을 **S**에 추가





Dijkstra의 최단 경로 알고리즘

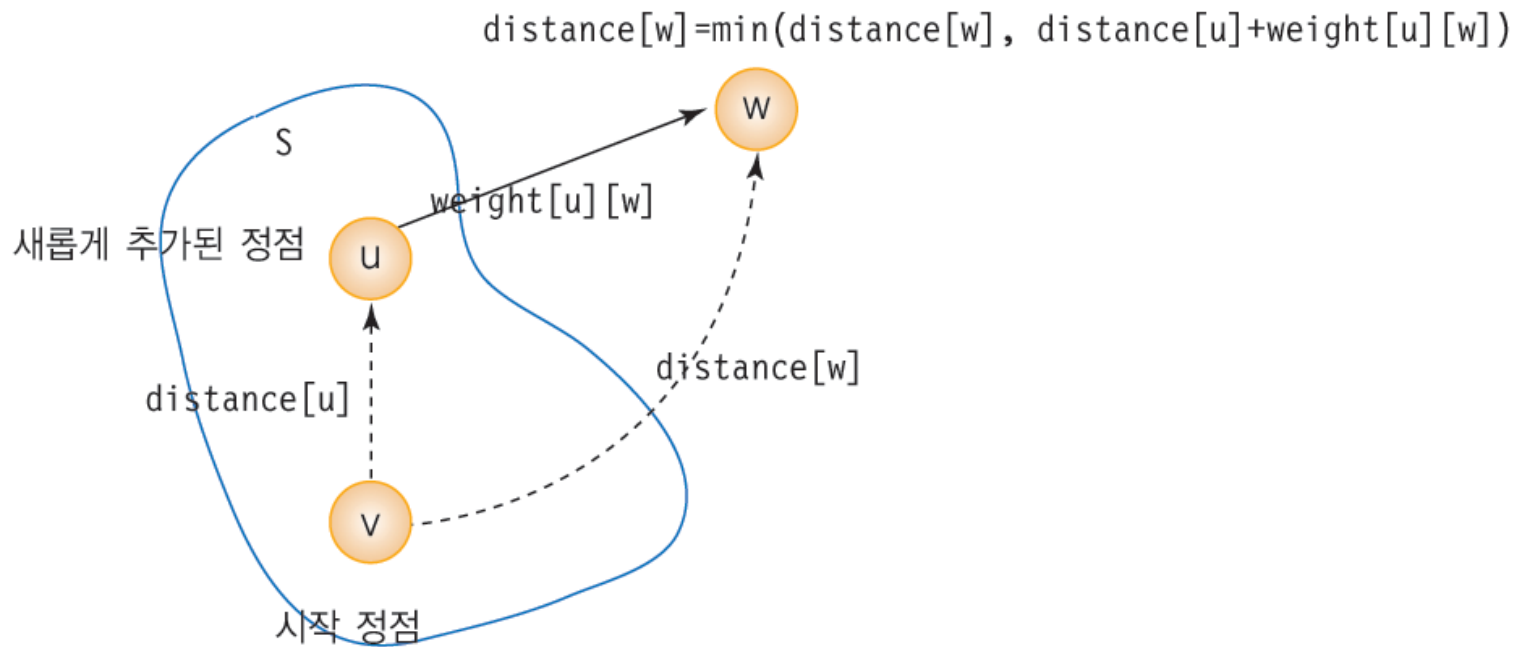
- 각 단계에서 S안에 있지 않은 정점 중에서 가장 distance값이 작은 정점을 S에 추가한다.
- 정점 w를 거쳐서 정점 u로 가는 가상의 더 짧은 경로가 있다고 가정해보자,
그러면 정점 v에서 정점 u까지의 거리는 정점 v에서 정점 w까지의 거리 ②와 정점 w에서 정점 u로 가는 거리③을 합한 값이 된다.
- 그러나 경로 ②는 경로 ①보다 항상 길 수 밖에 없다. 왜냐하면 현재 distance 값이 가장 작은 정점은 u이기 때문이다.





Dijkstra의 최단 경로 알고리즘

- 새로운 정점이 S에 추가되면 distance값 갱신





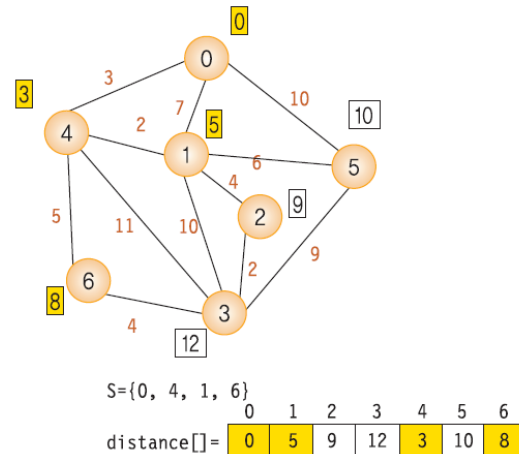
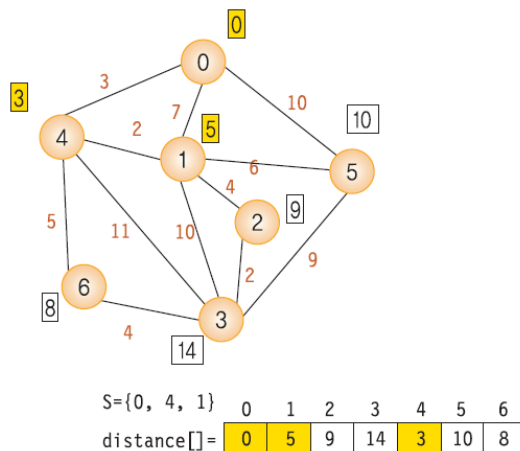
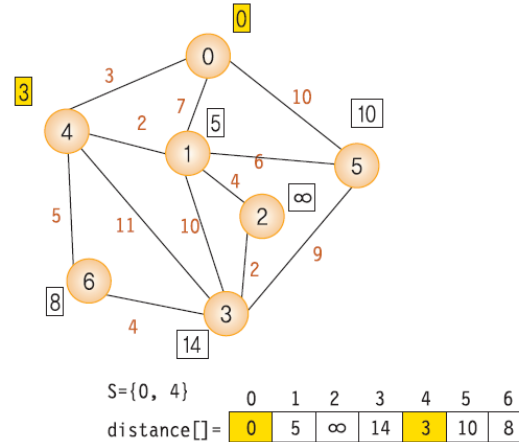
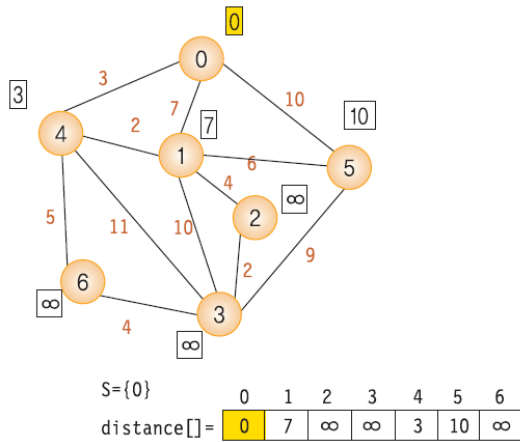
Dijkstra의 최단 경로 알고리즘

```
// 입력: 가중치 그래프 G, 가중치는 음수가 아님.  
// 출력: distance 배열, distance[u]는 v에서 u까지의 최단 거리이다.  
shortest_path(G, v)  
  
S ← {v}  
for 각 정점 w ∈ G do  
    distance[w] ← weight[v][w];  
while 모든 정점이 S에 포함되지 않으면 do  
    u ← 집합 S에 속하지 않는 정점 중에서 최소 distance 정점;  
    S ← S ∪ {u}  
    for u에 인접하고 S에 있는 각 정점 z do  
        if distance[u] + weight[u][z] < distance[z]  
            then distance[z] ← distance[u] + weight[u][z];
```



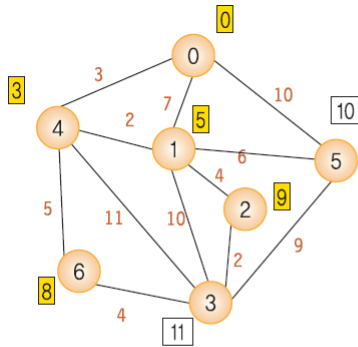


Dijkstra의 최단 경로 알고리즘



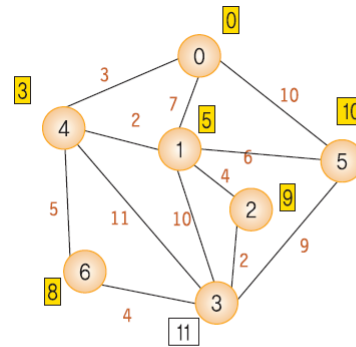


Dijkstra의 최단 경로 알고리즘



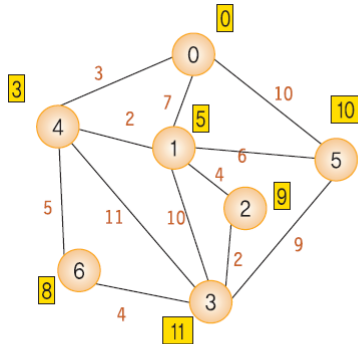
$S = \{0, 4, 1, 6, 2\}$

	0	1	2	3	4	5	6
distance[] =	0	5	9	11	3	10	8



$S = \{0, 4, 1, 6, 2, 5\}$

	0	1	2	3	4	5	6
distance[] =	0	5	9	11	3	10	8



$S = \{0, 4, 1, 6, 2, 5, 3\}$

	0	1	2	3	4	5	6
distance[] =	0	5	9	11	3	10	8





Dijkstra의 최단 경로 프로그램

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <limits.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0
#define MAX_VERTICES 100
#define INF 1000000 /* 무한대 (연결이 없는 경우) */

typedef struct GraphType {
    int n;          // 정점의 개수
    int weight[MAX_VERTICES][MAX_VERTICES];
} GraphType;

int distance[MAX_VERTICES]; /* 시작정점으로부터의 최단경로 거리 */
int found[MAX_VERTICES];    /* 방문한 정점 표시 */
```





Dijkstra의 최단 경로 프로그램

```
int choose(int distance[], int n, int found[])
{
    int i, min, minpos;
    min = INT_MAX;
    minpos = -1;
    for (i = 0; i < n; i++)
        if (distance[i] < min && !found[i]) {
            min = distance[i];
            minpos = i;
        }
    return minpos;
}
```





Dijkstra의 최단 경로 프로그램

```
//  
void shortest_path(GraphType* g, int start)  
{  
    int i, u, w;  
    for (i = 0; i < g->n; i++) /* 초기화 */  
    {  
        distance[i] = g->weight[start][i];  
        found[i] = FALSE;  
    }  
    found[start] = TRUE; /* 시작 정점 방문 표시 */  
    distance[start] = 0;  
    for (i = 0; i < g->n-1; i++) {  
        print_status(g);  
        u = choose(distance, g->n, found);  
        found[u] = TRUE;  
        for (w = 0; w < g->n; w++)  
            if (!found[w])  
                if (distance[u] + g->weight[u][w] < distance[w])  
                    distance[w] = distance[u] + g->  
weight[u][w];  
    }  
}
```





Dijkstra의 최단 경로 프로그램

```
int main(void)
{
    GraphType g = { 7,
        {{ 0, 7, INF, INF, 3, 10, INF },
        { 7, 0, 4, 10, 2, 6, INF },
        { INF, 4, 0, 2, INF, INF, INF },
        { INF, 10, 2, 0, 11, 9, 4 },
        { 3, 2, INF, 11, 0, INF, 5 },
        { 10, 6, INF, 9, INF, 0, INF },
        { INF, INF, INF, 4, 5, INF, 0 }}
    };
    shortest_path(&g, 0);
    return 0;
}
```



STEP 1: distance: 0 7 * * 3 10 *
found: 1 0 0 0 0 0 0

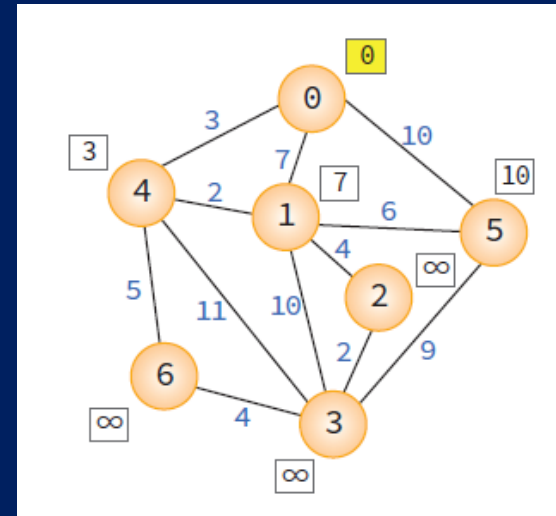
STEP 2: distance: 0 5 * 14 3 10 8
found: 1 0 0 0 1 0 0

STEP 3: distance: 0 5 9 14 3 10 8
found: 1 1 0 0 1 0 0

STEP 4: distance: 0 5 9 12 3 10 8
found: 1 1 0 0 1 0 1

STEP 5: distance: 0 5 9 11 3 10 8
found: 1 1 1 0 1 0 1

STEP 6: distance: 0 5 9 11 3 10 8
found: 1 1 1 0 1 1 1





Dijkstra의 최단경로 알고리즘 복잡도

- 네트워크에 n 개의 정점이 있다면, Dijkstra의 최단경로 알고리즘은 주반복문을 n 번 반복하고 내부 반복문을 $2n$ 번 반복하므로 **$O(n^2)$** 의 복잡도를 가진다.





Floyd 알고리즘

floyd(G):

for k $\leftarrow$ 0 to n - 1

for i $\leftarrow$ 0 to n - 1

for j $\leftarrow$ 0 to n - 1

$A[i][j] = \min(A[i][j], A[i][k] + A[k][j])$





Floyd의 최단경로 알고리즘

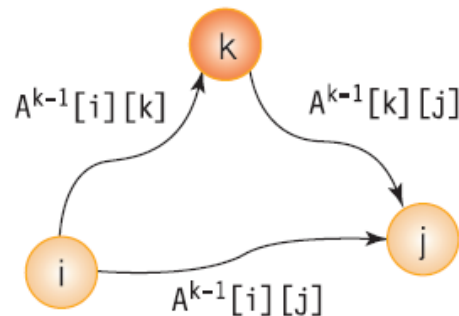
- 모든 정점 사이의 최단경로를 찾음
- 2차원 배열 A 를 이용하여 3중 반복을 하는 루프로 구성





Floyd의 최단 경로 알고리즘

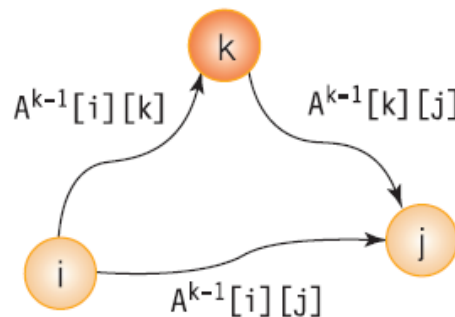
- $A^k[i][j]$
 - ▣ 0부터 k 까지의 정점만을 이용한 정점 i 에서 j 까지의 최단 경로 길이
- $A^{-1} \rightarrow A^0 \rightarrow A^1 \rightarrow \dots \rightarrow A^{n-1}$ 순으로 최단 경로 구해감
- A^{k-1} 까지 구해진 상태에서 k 번째 정점이 추가로 고려되는 상황을 생각하자





Floyd의 최단 경로 알고리즘

- 0부터 k 까지의 정점만을 사용하여 정점 i 에서 정점 j 로 가는 최단 경로는 다음의 2가지의 경우로 나뉘어진다.
- 정점 k 를 거치지 않는 경우:
 - ▣ $A^k[i][j]$ 는 k 보다 큰 정점은 통과하지 않으므로 최단거리는 여전히 $A^{k-1}[i][j]$ 임
- 정점 k 를 거치는 경우:
 - ▣ i 에서 k 까지의 최단거리 $A^{k-1}[i][k]$ 에 k 에서 j 까지의 최단거리 $A^{k-1}[k][j]$ 를 더한 값

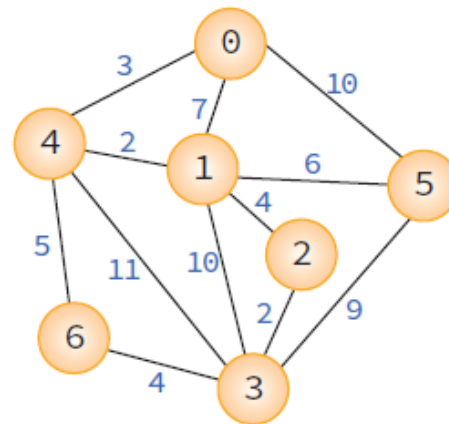




Floyd의 최단 경로 알고리즘

(1) 그래프의 가중치 행렬로 배열 A를 초기화한다.

0	7	*	*	3	10	*
7	0	4	10	2	6	*
*	4	0	2	*	*	*
*	10	2	0	11	9	4
3	2	*	11	0	*	5
10	6	*	9	*	0	*
*	*	*	4	5	*	0



(2) 정점 0을 거쳐서 가는 경로와 비교하여 최단 경로를 수정한다.

0	7	*	*	3	10	*
7	0	4	10	2	6	*
*	4	0	2	*	*	*
*	10	2	0	11	9	4
3	2	*	11	0	13	5
10	6	*	9	13	0	*
*	*	*	4	5	*	0

$$A^0[i][j] = \min(A^{-1}[i][j], A^{-1}[i][0] + A^{-1}[0][j])$$





Floyd의 최단 경로 알고리즘

(3) 정점 1을 거쳐서 가는 경로와 비교하여 최단 경로를 수정한다.

=====						
0	7	11	17	3	10	*
7	0	4	10	2	6	*
11	4	0	2	6	10	*
17	10	2	0	11	9	4
3	2	6	11	0	8	5
10	6	10	9	8	0	*
*	*	*	4	5	*	0
=====						

$$A^1[i][j] = \min(A^0[i][j], A^0[i][1] + A^0[1][j])$$





Floyd의 최단 경로 프로그램

```
void floyd(GraphType* g)
{
    int i, j, k;
    for (i = 0; i < g->n; i++)
        for (j = 0; j < g->n; j++)
            A[i][j] = g->weight[i][j];

    printA(g);

    for (k = 0; k < g->n; k++) {
        for (i = 0; i < g->n; i++)
            for (j = 0; j < g->n; j++)
                if (A[i][k] + A[k][j] < A[i][j])
                    A[i][j] = A[i][k] + A[k][j];

        printA(g);
    }
}
```





Floyd의 최단 경로 프로그램

```
int main(void)
{
    GraphType g = { 7,
        {{ 0, 7, INF, INF, 3, 10, INF },
        { 7, 0, 4, 10, 2, 6, INF },
        { INF, 4, 0, 2, INF, INF, INF },
        { INF, 10, 2, 0, 11, 9, 4 },
        { 3, 2, INF, 11, 0, INF, 5 },
        { 10, 6, INF, 9, INF, 0, INF },
        { INF, INF, INF, 4, 5, INF, 0 }}
    };
    floyd(&g);
    return 0;
}
```





Floyd의 최단 경로

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	7	INF	INF	3	10	INF
1	7	0	4	10	2	6	INF
2	INF	4	0	2	INF	INF	INF
3	INF	10	2	0	11	9	4
4	3	2	INF	11	0	13	5
5	10	6	INF	9	13	0	INF
6	INF	INF	INF	4	5	INF	0

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	7	11	17	3	10	INF
1	7	0	4	10	2	6	INF
2	11	4	0	2	6	10	INF
3	17	10	2	0	11	9	4
4	3	2	6	11	0	8	5
5	10	6	10	9	8	0	INF
6	INF	INF	INF	4	5	INF	0

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	7	11	13	3	10	INF
1	7	0	4	6	2	6	INF
2	11	4	0	2	6	10	INF
3	13	6	2	0	8	9	4
4	3	2	6	8	0	8	5
5	10	6	10	9	8	0	INF
6	INF	INF	INF	4	5	INF	0

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	7	11	13	3	10	17
1	7	0	4	6	2	6	10
2	11	4	0	2	6	10	6
3	13	6	2	0	8	9	4
4	3	2	6	8	0	8	5
5	10	6	10	9	8	0	3
6	17	10	6	4	5	13	0

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	9	11	3	10	8
1	5	0	4	6	2	6	7
2	9	4	0	2	6	10	6
3	11	6	2	0	8	9	4
4	3	2	6	8	0	8	5
5	10	6	10	9	8	0	13
6	8	7	6	4	5	13	0

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	9	11	3	10	8
1	5	0	4	6	2	6	7
2	9	4	0	2	6	10	6
3	11	6	2	0	8	9	4
4	3	2	6	8	0	8	5
5	10	6	10	9	8	0	13
6	8	7	6	4	5	13	10

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	9	11	3	10	8
1	5	0	4	6	2	6	7
2	9	4	0	2	6	10	6
3	11	6	2	0	8	9	4
4	3	2	6	8	0	8	5
5	10	6	10	9	8	0	13
6	8	7	6	4	5	13	0





Floyd의 최단경로 알고리즘 복잡도

- 네트워크에 n 개의 정점이 있다면, Floyd의 최단경로 알고리즘은 3중 반복문을 실행되므로 시간 복잡도는 $O(n^3)$ 이 된다
- 모든 정점상의 최단경로를 구하려면 Dijkstra의 알고리즘 $O(n^2)$ 을 n 번 반복해도 되며, 이 경우 전체 복잡도는 $O(n^3)$ 이 된다

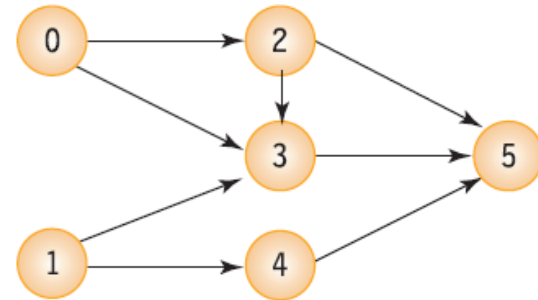




위상정렬(topological sort)

- 방향 그래프에서 간선 $\langle u, v \rangle$ 가 있다면 정점 u 는 정점 v 를 선행함
- 방향 그래프 정점들의 선행 순서를 위배하지 않으면서 모든 정점을 나열
- 선수 과목은 과목들의 선행 관계 표현함

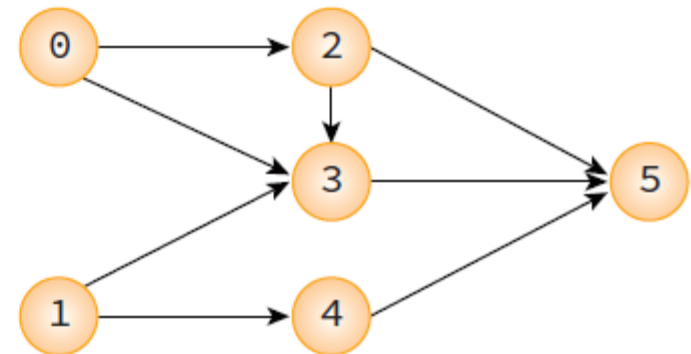
과목번호	과목명	선수과목
0	컴퓨터개론	없음
1	이산수학	없음
2	C언어	0
3	자료구조	0, 1, 2
4	확률	1
5	알고리즘	2, 3, 4



- 위상 순서(topological order)
 - ▣ (0,1,2,3,4,5) , (1,0,2,3,4,5)
- (2,0,1,3,4,5)는 위상 순서가 아님
 - ▣ 왜냐하면 2번 정점이 0번 정점 앞에 오기 때문



과목번호	과목명	선수과목
0	전산학 개론	없음
1	이산수학	없음
2	자료구조	1
3	알고리즘 분석	0, 1, 2
4	운영체제	1
5	인공지능	2, 3, 4





위상정렬 알고리즘

```
// Input: 그래프 G=(V,E)
// Output: 위상 정렬 순서

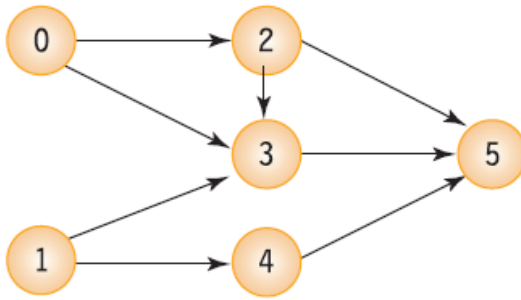
topo_sort(G)

for i←0 to n-1 do
    if( 모든 정점이 선행 정점을 가지면 )
        then 사이클이 존재하고 위상 정렬 불가;
    선행 정점을 가지지 않는 정점 v 선택;
    v를 출력;
    v와 v에서 나온 모든 간선들을 그래프에서 삭제;
```

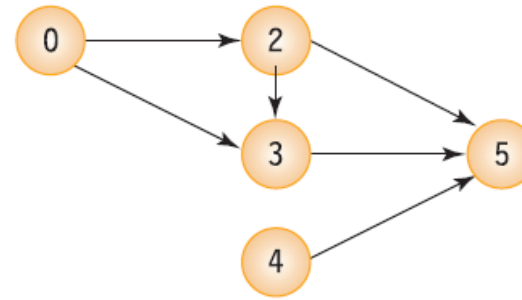




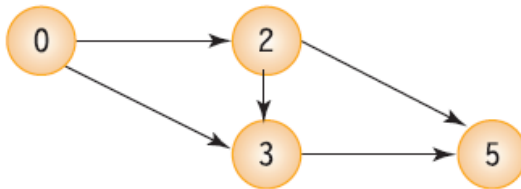
위상정렬의 예



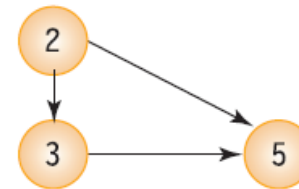
(a) 초기 상태



(b) 1 제거



(c) 4 제거



(d) 0 제거



(e) 2 제거



(f) 3 제거





위상정렬 프로그램

// 위상정렬을 수행한다.

```
int topo_sort(GraphType *g)
```

```
{
```

```
    int i;
```

```
    StackType s;
```

```
    GraphNode *node;
```

```
    // 모든 정점의 진입 차수를 계산
```

```
    int *in_degree = (int *)malloc(g->n * sizeof(int));
```

```
    for (i = 0; i < g->n; i++)
```

```
        // 초기화
```

```
        in_degree[i] = 0;
```

```
    for (i = 0; i < g->n; i++) {
```

```
        GraphNode *node = g->adj_list[i]; // 정점 i에서 나오는 간선들
```

```
        while (node != NULL) {
```

```
            in_degree[node->vertex]++;
```

```
            node = node->link;
```

```
        }
```

```
    }
```





위상정렬 프로그램(cont.)

```
// 진입 차수가 0인 정점을 스택에 삽입
init(&s);
for (i = 0; i < g->n; i++) {
    if (in_degree[i] == 0) push(&s, i);
}
// 위상 순서를 생성
while (!is_empty(&s)) {
    int w;
    w = pop(&s);
    printf("정점 %d ->", w); //정점 출력
    node = g->adj_list[w]; //각 정점의 진입 차수를 변경
    while (node != NULL) {
        int u = node->vertex;
        in_degree[u]--; //진입 차수를 감소
        if (in_degree[u] == 0) push(&s, u);
        node = node->link; // 다음 정점
    }
    free(in_degree);
    printf("\n");
    return (i == g->n); // 반환값이 1이면 성공, 0이면 실패
}
```





위상정렬 프로그램(cont.)

```
int main(void)
{
    GraphType g;

    graph_init(&g);
    insert_vertex(&g, 0); insert_vertex(&g, 1);
    insert_vertex(&g, 2); insert_vertex(&g, 3);
    insert_vertex(&g, 4); insert_vertex(&g, 5);

    //정점 0의 인접 리스트 생성
    insert_edge(&g, 0, 2); insert_edge(&g, 0, 3);
    //정점 1의 인접 리스트 생성
    insert_edge(&g, 1, 3); insert_edge(&g, 1, 4);
    //정점 2의 인접 리스트 생성
    insert_edge(&g, 2, 3); insert_edge(&g, 2, 5);
    //정점 3의 인접 리스트 생성
    insert_edge(&g, 3, 5); //정점 4의 인접 리스트 생성
    insert_edge(&g, 4, 5);
    //위상 정렬
    topo_sort(&g);
    // 동적 메모리 반환 코드 생략
    return 0;
}
```



정점 1 -> 정점 4 -> 정점 0 -> 정점 2 -> 정점 3 -> 정점 5 ->

